ISSN 1881−6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

一般化をはかる数学学習を捉える基本的枠組みの構築

− Bethの数学的思考の相と，Polyaの一般化に注目して −

早田 透　*Toru Hayata*

vol.13, no.2
Jun. 2010

鳥取大学 数学教育学研究室

一般化をはかる数学学習を捉える基本的枠組みの構築
–*Beth*の数学的思考の相と，*Polya*の一般化に注目して–

早田　透
鳥取大学地域学研究科

1. はじめに

算数・数学の授業においては，ほぼ毎時間何らかの一般化がはかられている．そのため，一般化をはかる学習を改善していくことが算数・数学教育全般を改善する事に繋がるだろう．

その重要性から，一般化については様々な取り組みがこれまでになされている．例えばDölfler (1991a)は，一般化について鋭く分析し，その過程を一般化モデルとして提示した．その研究は認知的・認識論的な見地から一般化を詳細に分析し，抽象と一般化を接続した優れた研究である．

Dölfler（1991a）が研究の結論に，“一般化とは変数を構成する事を意味する”（ibid,p.84）と述べたように，一般化に関する研究は『一般化とは何か？』あるいは『一般化とはどの様なものであるべきか？』といった問いに応える研究といえる．

一方で，たとえ一般化をはかる学習を教師が展開しようとしたとしても，一般化以外の数学的思考がそこでは展開される．この様な思考は『一般化とは何か？』という問いでは焦点が当てられていない．

本稿ではここに注目し，一般化をはかる学習において，一般化を含めた思考がどのように展開されるかについて，基礎付けていく．

既に本研究は≪特殊から一般へ≫という一般化をはかる学習において，少なくとも教科書においてはその様な一般化が達成されていないという点を問題であると捉えた．その点を基に，一般化をはかる学習全般の改善に取り組むべく3つの研究課題を導出した（早田,2009）．即ち，

・研究課題1
　一般化をはかる学習において，どのように概念を構成していくか
・研究課題2
　一般化をはかる学習において，どの様に捨象する差異性とその程度を決定していくか
・研究課題3
　一般化をはかる学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どの様に学習機会として取り入れるか．

これらの研究課題に取り組み，解決を図ることで，一般化をはかる学習がどの様に進められるべきであるかを明らかにする事を本研究の目的とする．

研究課題に取り組むにあたっては，一般化という誰もが行う数学的な認識の本性に直結した過程に対して，鋭く迫る必要がある．その様な要請に応える研究として，直観主義の立場から数学的な認識の本性を解き明かそうとしたBeth(Beth and Piaget, 1966)を中心に考察する．

まず，2章では一般化とはどの様な認識であるかについてある程度明らかにし，本研究における一般化の取り扱い方を定めた．

3章においては，一般化をはかる学習全体を捉える為に，Bethが主張する数学的思考における3つの連続的な相を区別する必要性に注目した．即ち
(1)【探求】の相(The phase of “enquiry”)
(2)【配列】の相(The phase of “arrangement”)
(3)【検証】の相 (The phase of “verification”)

この3つの相は，一般化をはかる学習においても大切にしたい相であるため，本研究はこれを数学的思考の枠組みとして捉える．

この様な捉え方をした時，一般化そのものの前段階にある発見・創造といった側面を持つ【探求】の相が，一般化の研究においては必ずしも十分に検討されていない事が明らかになった．

そこで，4章では【探求】の相と【配列】の相で見られる発明性や創造性に注目し，数学における発見を再構成しようとしたPolyaが一般化について記述した箇所を参照する．

5章では，これらの議論を基に一般化をはかる学習全般を捉えるための基礎的研究として，一般化をはかる学習のモデルを構築した．更に，事例からモデルを検証した．

その上で，6章においてモデルから研究課題を検討し，目的の達成をはかった．

2. 数学的認識と一般化

2.1 本研究における一般化

一般化とは何か．誰もが行う過程でありながら，この事を説明するのは非常に困難である．

一般化をはかる学習を考えるにあたって，この問

いに応える事は必要不可欠であるが，一般化が数学的認識の本性と深く関わっている以上，その認識論的な位置付けは容易ではない．そのため様々な立場からの議論がこれまで行われてきている．

例えばDölfler(1991a)は認識論的視点と認知的視点の両方から一般化を検証し，抽象と一般化を接続した一般化モデルを提示している．岩崎秀樹氏はそこに記号論・メタ認知に関する洞察を加え，一般化モデルを修正する事を提案している．

本研究は当然これらの研究の是非を論じなくてはならない．しかし，一般化をはかる学習がどの様に進められるべきであるかを明らかにする，という本研究の目的を考えた時，先にこれらの議論を行うよりも，まず一般化をはかる学習について捉えながら，どの様に一般化を捉える事が適切であるかを議論した方が目的の達成に有効であると考えた．

少なくとも，“一般化(generalization)も拡張(extention)も，はじめにあった概念または形式について，その適用範囲が広くなるようにすることである．”（中島,1981）事は確かである．更に認識という観点から見れば“既知のものを文字通り一般化していくことであり，そこには認識上の方向性が認められる．”（友定･姫田･溝口,2006）事も同様に確かであろう．

この事から，本稿では認識上の方向性を持って≪特殊から一般へ≫と既知のものの適用範囲を広げることを，広く一般化と呼び研究の対象とする．

また，ここでの特殊とは既知の概念・形式・命題などが成り立つ一定の範囲の事を指し，一般とは同様のものが成り立つような，特殊よりも広い経験的（empirical）ではない範囲のことを指す．即ち，特殊と一般は相対的な関係である．

また，数学のあらゆる場面で行われる一般化を一元的に捉えるのではなく，例えばDölfler(1991a)は内包的一般化と外延的一般化を，Polya(1954a)は濃くする一般化と薄める一般化をそれぞれ区別している．あるいはもう少し素朴に，図形に関する一般化と数や式に関する一般化は果たして同一視してよいのか，といった様な疑問もあるだろう．

これらの議論は極めて重要であり，一般化をはかる学習においても当然無視することは出来ないが，同様の理由から本稿ではこれらを特別に区別することはせず，広く一般化をはかる学習について考察していきたい．

3.直観主義とBethの数学的思考の相

3.1 直観主義

さて，一般化という過程は誰もが行う数学的認識の本性に深く関わっており，従って本研究は数学的認識の本性に迫らなくてはならない．

そのような要請に応える研究は，数学的認識について鋭い分析を行う認識論である．その中でも，本研究は直観主義という立場に注目した．

直観主義という考え方は，多くの数学者から余り積極的に支持されていないという事は事実である．

しかし，Beth(1966)は数学的推理が伝統的な三段論法で分析不可能であることを示し，実際の数学的思考について認識の本性から明らかにしようと試みている．Bethの言葉を借りるならば，”直観主義は数学的推理をできる限り，古典的形式論理学から借用したスキーマよりも実際の思考過程に適応させる試みとして定義される”（Beth and Piaget, 1966,p.21）ので，”実際の数学的思考と，一般にdiscursiveな思考全般のメカニズムについての価値ある情報を与える”(ibid,p.21)事が期待される．従って，本研究にとっても直観主義の研究が有益な情報を与えることが期待される．なぜならば，本研究の対象は一般化をはかる学習という，実際の思考の場だからである．

3.2 Bethの数学的思考の相

実際の思考の場として一般化をはかる学習を考えた時，勿論そこでは一般化が行われてはいるのだが，それ以外の数学的思考も行われていると考えられる．例えば，学習者が一般化しようと考えるまでの数学的思考があるだろう．その様に見れば，一般化は複合的な心的活動における数学的思考の内の一種でしかない．従って，実際の数学的思考がそもそもどの様なものであるかを捉えなくてはならない．

Bethによれば，私達が数学的思考を捉えようとするのであれば，以下に記す3つの連続的な相を区別しなくてはならない．

【探求】の相 (The phase of “enquiry”)

“探求の相においては，思考には全く制限が課されない．全ての方法には価値があり，目標のより近くに導かれていく．この相は自発的で，根源で，数学的で，真に発明的であり，そして本当に創造的な思考である．”（Beth,ibid,P22）

【配列】の相 (The phase of “arrangement”)

“この相は正しいアーギュメントの形式で見つか

る時，解決をもたらす傾向がある．この相はある種の発明性を必要とするが，しかし実際の創造ではない．”（Beth,ibid,p.22）

【検証】の相 (The phase of “verification”)

“この相は確実で正しく，本当に定められた問題の解決に至るためのアーギュメントの再考から成っている．”（Beth,ibid,p.22, 下線･括弧は筆者）

通常，教科書を含めた数学的な出版物に再現されるのは【検証】の相のみである．この事は，何かしら数学の本を開いてみたとき，そこに紹介されている定理や性質がなぜ成り立つかについて描かれてはいても，それをどの様に発見したか，あるいはどの様に試行錯誤したか，といった事についてほとんどの場合触れられていないことが好例である．これは，読者が提案された解決の科学的な価値を十分に判断できるようにするためである．

我々がアーギュメントを再考するにあたっては，【配列】の相はそれ自身の内に独立な興味を持たない．もしアーギュメントにおける試みが成功しないのであれば，それは得られた解決が正しくないか，不完全であるか，又は混乱しているからであり，この時は【探求】の相へと戻らなくてはならないからである．

しかし，【探求】の相は，通常不規則であるため，理解できる形式で再現することは困難である．

このことから，一見すると直観主義の数学から受け継いだとしても，この様な分析が価値のある情報を与えないように見えるかもしれない．その原因は，主として不規則である【探求】の相にあるといえる．

3.3 Bethの数学的思考の相と一般化

Bethが提示した3つの相を纏めて，本研究はBethの数学的思考の相と呼ぶ．この様な考え方は，実際の学習場面においても大切にしていきたい，重要な考えである．

しかしながら，従来の一般化に関する研究では，一般化それ自体よりも前に展開される，不規則な【探求】の相における発明や創造には注目していないことが指摘される．

従って，一般化をはかる学習について明らかにするためには，Bethの数学的思考の相を通して，これらの不規則さにも目を向けなくてはならない．

一方で，Bethの数学的思考の相を単独で一般化をはかる学習に対して用いるには不十分である．なぜならば，Bethの数学的思考の相は一般化について特別に記述されていないため，一般化をはかる学習について捉えるためには，この枠組みを一般化という観点から特徴付ける必要があるだろう．

4.Polyaの一般化とBethの数学的思考の相

4.1 Polyaの精神と一般化

【探求】の相について明らかにするために，本研究はPolya.Gの研究に注目したい．Polyaはその著作で知られるように，実際の数学的思考に基づいて数学における発見学を再構成しようとした．本稿においてはPolyaの主要な著作であるPolya(1945,1954a&1954b)を参照している．

これらの著作を一貫するPolyaの基本的な精神は，以下の二カ所に集約されてるといえる．

“数学的事実はまず推測されしかる後証明される，そして本書のほとんどあらゆる箇所は，そのことが正常な手続きであることを示そうと努めている．”（Polya,1954b,P.187）

“数学者の創造的仕事の結果は論証的推論であり，証明であるが，しかしその証明は蓋然的推論によって，推測によって，発見されるのである．”（Polya,1954b,P.184）

Polyaのこの精神は，【探求】の相という不規則な相を真に創造的な思考と位置付け，数学的推理を実際の思考過程に適応させようとするBethの精神と一致している．（Bethは発明，Polyaは発見という言葉を使うが，それらの言葉の意図は同一であるため，以降はPolyaに従い発見で統一する．）

Polyaの述べる一般化はBethのように数学的認識の本性から考察されたものではないが，≪特殊から一般へ≫と，どの様に推理がなされるという事を，特に一般の命題を発見する事，推測を立てることについて，様々な事例と共に具体的に記述している．

そこで，Bethの数学的思考の相に対してPolyaの主張，特に思考の具体的な様相を位置付けることで，一般化をはかる学習を捉えるために適した枠組みを構築する．

4.2 帰納と類比

4.2.1 事例：ゴールドバッハの予想

一般化についてPolyaが取り上げた事例として，ゴールドバッハの予想がある．

何かの拍子に『3+7=10』『3+17=20』『13+17=30』なる三つの関係の類比に気付くとす

る．3,7,13,17は全て素数であり，10,20,30は全て偶数である．他の偶数の場合をいくつか調べてみると，例えば『6=3+3』『8=3+5』となる．従って『偶数=素数+素数』という推測が成り立つ.

しかし，これは偶数として2と4を選択した場合うまく行かないので，より正しくは「素数でもなく素数の平方でもない任意の偶数は二つの奇数の素数の和である」という推測が成り立つ.

ここで，一般の関係を推測することができたが，あくまで経験から導き出された推測の範疇を出ず，この後に証明する手順が必要となる．しかし，帰納によって他の特殊な場合を試すことで，推測の信憑性は高まっていくだろう.

この様にしてゴールドバッハの予想が発見される，というPolyaのこの事例は，3つの特殊な式で成り立つ性質を，より広い素数や偶数という経験的ではない範囲へ適用しようとする認識であるから，一般化であると捉えられる.

4.2.2. Bethの数学的思考の相における帰納と類比

本事例においては，『3+7=10』『3+17=20』『13+17=30』という3つの式が特殊であり，そこから一般化されている．では，3つの式が特殊だということはいつ認識されたのであろうか.

3つの式を類比することで，3,7,13,17は全て素数であり，10,20,30は全て偶数であるということにまず気がついた事に注目する．即ち，ここでは与えられた3つの計算の中に素数・偶数という一般を類比によって見出している事が指摘される．この過程を経ることで，初めて3つの式が特殊であると認識したといえる.

この様に，類比を用いて所与のものに一般を見出し，所与のものを特殊と見なす過程が一般化を達成する上で重要であるといえる．この過程は，発見的である【探求】の相に位置付けられる.

その上で，更に類比から偶数全般という一般の場合について成り立つ性質が推測された．この推測を創造するために用いた類比がその大きな役割を果たしたといえる．従って，真に発見的である【探求】の相における1つの様相として類比による命題の推測を位置付けることができる.

次に，発見された推測の信憑性を確かめることが試みられた．特殊化が行われ，いくつかの特殊な場合について帰納的に確かめた．ここでは帰納によってアーギュメントを再考しており，帰納を【検証】の相に位置付ける事ができるだろう．更に，帰納の結果，偶数から2と4を取り除かなくてはならない事が見出された．従って，帰納は同時に発見的な【探求】の相にも位置付ける事ができる．また，その様な帰納に必要な特殊を生み出すための特殊化も，併せて位置付けられる.

4.3 一般の命題の論証と2つの特殊

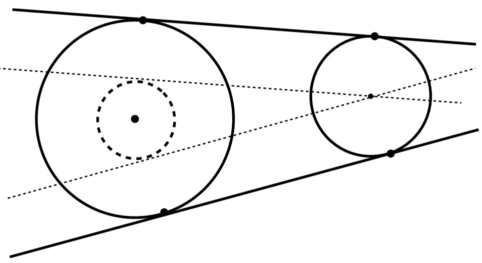
4.2の議論によって，一般化を考える上で一般の命題を推測する過程の一端が明らかになった.

だが，Polyaのこの事例からは推測された一般の命題を論証するという過程については当然だが不明のままである.

異なる事例において，Polyaは少なくとも2つの特殊について考察する事が一般化を達成する上で，それも特に一般な命題を論証する上で重要な手がかりとなる事を主張しているた．そこで，以下に事例と共に検討する.

4.3.1 極端に特別な特殊

例えば，『与えられた2つの円の共通外接線を作図する方法』を考えるとする．この場合，図1のように1つの円と，1つの点にまで退化した円を考える事が，重要な手がかりとなる.



（図1：共通接線作図の手がかり）

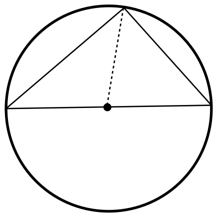
2つの円の共通外接線は両方の半径が同じだけ減少する時だけ自身に平行である．従って，共通接線の方向を変えることなく円の1つを1点に帰着させることが可能である．この事を逆におこなえば，与えられた2つの円の共通外接線は比較的容易に作図可能である.

この様に，「極端に特別な特殊」を創造し，推理することが一般化を達成するために重要な役割を担っているといえる.

4.3.2 有力な特別な特殊

Polyaによれば，しばしば一般の場合の解決を含む，有力な特別な特殊について考察することが，一般化を達成するための手がかりとなる.

例えば円周角の定理を考察するのであれば，その有力な特別な特殊として中心角が180°の場合（Thalesの定理）を考える事が，大きな手がかりとなる.



（図2：有力な特別な特殊,Thalesの定理）

この場合の証明は，図2のように弧に対する円周上の点から中心にむけて線を引く事で比較的容易に達成可能である．そして，この解決は円周角の定理そのものの証明の手順を相当含んでいる．

この様に，有力な特別な特殊を創造し，推理することが，一般化を達成するために重要な役割を担っているといえる．

以上の2つの事例は，位置づけの異なる特殊が重要な役割を果たしている．これらの特殊が，一般の命題を創造するための手がかりとなることを考慮すれば，【探求】の相において，一般の命題を推測した後に「極端に特別な特殊」と「有力な特別な特殊」を創造し，それらについて推理するという様相を位置付ける事ができる．

4.4 【配列】の相

以上が一般化に関する（質的な相違についての議論を除いた）Polyaの主張であり，いくつかの様相をBethの数学的思考の相の内，【探求】の相と【検証】の相に位置付ける事ができた．

しかし，既に述べた通り【探求】の相は通常不規則である．例えば4.2で用いたゴールドバッハの予想事例において明らかになった，一般を見出す事・帰納・類比といった様相が，この様に整然と順番通りに見られるとは限らない．その過程においては，”いろいろな観察を組合せ，類比をたどらなければなりません；あなた方は何回も何回もやってみなければわからないのです．”(Polya,1954a,P.4)とあるように，試行錯誤が順不同に行われるだろう．

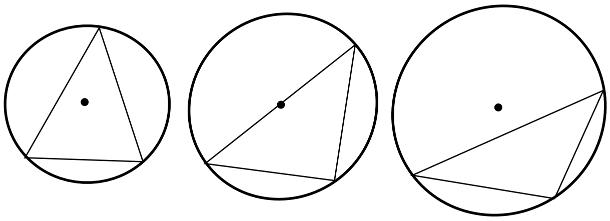
しかし，Polya（あるいは本研究）が記述している様相は明らかに順序を持って整然としている．これは，上述の試行錯誤によって得られた推測が，後から見直され【配列】された結果を記述せざるを得ないからであると捉えられる．

従って，一見するとPolyaは【配列】の相について特別に記述しているようには見えないが，その精神をBethの数学的思考の相に照らし合わせれば，試行錯誤によって得られたアーギュメントが【配列】されていることは明白である．

4.5 分類

Polyaの主張から，一般化についてある程度の事が明らかになった．しかし，筆者の先行研究において提示した，円周角の定理が一般に成り立つ事を論証しようと試みる場面における，「場合分け」と呼ばれる事象（早田，2009）を十分に説明出来ない．

通常，我々が円周角の定理を証明するに際しては図3のような3つの場合について推理する．



（図3：円周角の定理を論証する対象）

しかし，なぜこの3つの場面について論証しようとするのかという事について，少なくとも教科書では何も述べていない．また，Polyaから得られた様相もこれに当てはまらない．

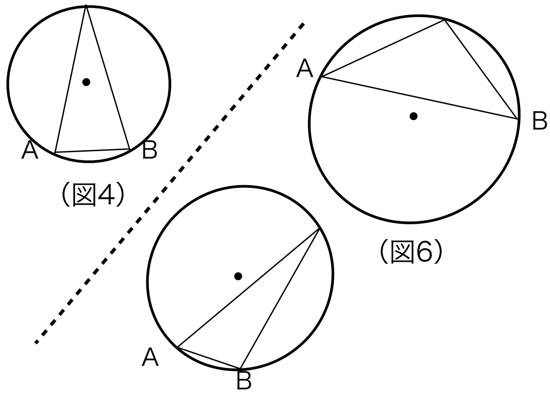
そこで，本研究は我々が数学的な問題を解決しようとする時に行う「分類」が重要な様相であり，この場面に位置付けられるのではないかと考えた．

そこで，分類という観点から「場合分け」と呼ばれるような証明が必要となる，円周角の定理を証明する本事例を分析し検討する．

4.5.1 円周角の定理事例1:決定的な分類

もし私達が円周角の定理を証明しようと試みている時に，1つの弧に対する円周角が中心角の半分であり常に一定であるという推測が成り立ったとする．当然，次に推測を証明しなくてはならない．

その際，それぞれ異なる特殊な場合において，図5と図6を同じものであると，一方で図4は異なるものであると分類する事が（点線のように）行われる．



（図4）

（図6）

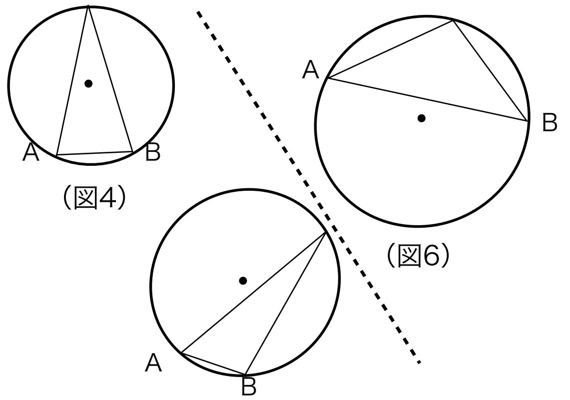
（図5）

ここでは，『三角形の外接円の中心がどこにあるか』という観点から分類が行われている．分類とは，この様に設定されたある一定の観点からなされるものである．

もしこの分類が達成されたのであれば，外接円の中心の位置が証明に対して何かしら関与してくるだろう，という指針を得ることができると期待される．ひいては，一般化を達成するにあたって分類することが決定的な役割を果たすと考えられる．

4.5.2 円周角の定理事例2:成功的でない分類

ただし，分類は必ずしも一般化を達成するために決定的な役割を果たすわけではない．それは，分類のための観点が常に適切であるとは限らないからである．例えば，同じ図4・図5・図6を以下の様に（点線で）分類したとしよう．ここでは，分類のための観点を『弧に対する円周角が中心よりも上にあるか，下にあるか』に設定している．



(図4)　(図5)　(図6)

この様な分類は，一般化に対してそれほど決定的であるとは言えない．しかし『弧ABに対する円周角が中心よりも上にあるか，下にあるか』が解決に関係なさそうだ，という事は明らかになるため，一般化を達成するにあたってある種の指針を与える事は確かである．

以上の様に，分類が一般化に対して決定的な役割を果たす場面と，そうではない場面があるが，いずれにせよ一般化に対して寄与していることが明らかになった．また，分類する際に常に行われる観点の設定が重要であることが判明した．これは，創造的な【探求】の相に位置付ける事ができる．

この結果，Polyaに不足していた分類という様相が明らかになった．これらの様相を用い，Bethの数学的思考の相を一般化をはかる学習に対して特徴付けることができた．次に，これをモデルとして構築することで，一般化をはかる学習全般を捉える枠組みとしたい．

5. 一般化の学習モデルの構成

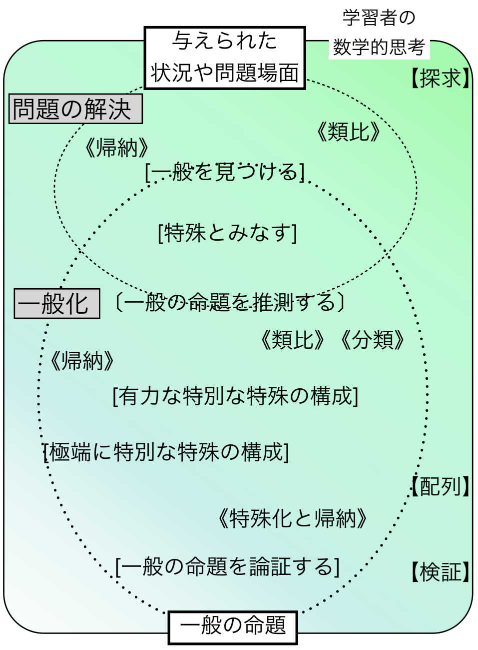
5.1 一般化の学習モデル

2〜4章の議論から，Bethの数学的思考の相を大枠として，その中にPolyaから得た具体的様相と，Polyaに不足していた分類という様相を加える事で一般化をはかる学習への指針を得ることが出来た．

しかし，実際の学習，即ち授業を考える上では，更に考慮されなくてはならない点がある．既に述べた通り一般化は≪特殊から一般へ≫という思考過程でなくてはならない．

従って，最初に（教師から）提示される問題場面や状況は教師がその時間に達成させたい一般な命題に対する特殊でなくてはならない事が要請される．同時に，ゴールドバッハの予想事例から明らかになったように，学習者は試行錯誤の中で（教師から）与えられた問題場面や状況の中に一般を見つけ，与えられたものを特殊と見なす過程が存在するべきである．従って，実際の授業においてはその様な過程が位置付けられなくてはならない．少なくとも授業においては，その様な過程は問題を解決する過程において行われるべきであろう．

従って，ここまでの議論から以下の図7を本研究は一般化をはかる学習における仮説的モデルとして提示したい．



(図7:一般化をはかる学習を捉える仮説的モデル)

このモデルにおいては，一般化が始まるまでの様相が実際の学習という位置付けられている事が最大の特徴である．

以下に，本モデルを事例に適応し，一般化をはかる学習において学習者の数学的思考を捉えられていることを示すと同時に，本モデルが学習のモデルであることを示す．

5.2 事例によるモデルの検討

事例：くり上がりのある足し算

小学校1年生で，『7＋8＝15』を基に初めてくり上がりのある足し算を学習する場面を想定する．『7＋8＝』という場面が学習者に与えられ，様々な試行錯誤の末に，加数分解・あるいは被加数分解を用い，計算結果が15である事を見出したとする．通常，この計算を達成したならば他の10より大きくなる足し算でも同様に計算出来るようになることが期待される．即ち本研究の定義する一般化がここで達成されている筈である．

もし学習者が『7＋8＝』という計算を達成したならば，この計算の中に自然数（数）という一般と，10より大きい数という一般を見つける．同時に，与えられた式が10より大きい足し算の特殊な場合であると見なされる．そこで加数分解・被加数分解という手順がいつも使えるのではないかと一般な命題が推測される．あるいはもう少し慎重な学習者であれば，例えば，一般な命題を推測する前後に『5＋9＝』といった他の場面についても試行錯誤を試みた上で，一般な命題を推測するだろう．勿論，これらの過程は不規則に表れるはず（本稿に文字で記述されているのは【配列】の結果）である．

この段階の学習者であれば，『5＋9＝』のような10より大きくなる足し算の他の場合で試す事によって論証され，10より大きくなる足し算全ての場合へと一般化するだろう．

これら一連の手順は，モデルで捉える事が可能であり，結果として足し算についての以前の概念が変化した．以前の概念が変化するとは，即ち学習である（Sierpinska,2005,p.7）ため，本モデルを通過することが学習であると捉える事が出来る．

6. 研究の結論

6.1 各研究課題の検討

本研究が挙げた3つの研究課題を，モデルから検討することで，一般化をはかる学習がどの様に進められるべきであるかが明らかとなった．そこで，それぞれの研究課題ごとに，モデルから得られた成果を述べる．

・研究課題1
一般化をはかる学習において，どのように概念を構成していくか

この研究課題に対しては，概念を構成するために重要な役割を果たす「解決や状況・問題場面を特殊とみなす」過程が重要であることが解った．また，「極端に特別な特殊」や「有力な特別な特殊」を構成することが一般化に大きく寄与し，重要であることも判明した．帰納や類比によって一般の命題を推測する事も，命題や対象を構成していると考えられるため，この研究課題に対して大きな意味を持つ．

いずれも【探求】の相に位置付けられる事から，【探求】の相と関連が深いと捉えることが出来る．

・研究課題2
一般化をはかる学習において，どの様に捨象する差異性とその程度を決定していくか

この研究課題に対しては，分類が重要である．4.5において示した事例では，円周角の定理を証明しようとする際の分類について，決定的な役割を果たす場合と，そうでない場合について述べた．

分類が決定的な役割を果たす場合，円内部に出来る三角形と外接円の中心の位置関係が重要であることが見出されると述べたが，位置関係のなかでも外接円の中心の位置が三角形の「内」「外」「三角形の辺上」であるという事以外は捨象してもよいということが同時に明らかになっている．

また，そうで無い場合は円の中心と円周角の位置関係は一般化を達成するにあたって無関係であること，いいかえれば捨象してよいことが明らかになっている．

このどちらの場合にせよ，研究課題2には【探求】の相における分類が大きく関係している事が明らかになった．

・研究課題3
一般化をはかる学習において，互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを，どの様に学習機会として取り入れるか

この研究課題に対しては，帰納とそれに伴う特殊化・類比・特殊化を位置付ける事が出来た．このいずれもが，互いに異なる特殊について【探求】することが明らかになったためである．

6.2今後の課題

6.2.1 一般化をはかる学習モデルの限定

本研究のモデルは，一般化をはかる学習を捉えるための枠組みとして構築されたモデルであり，学習者の思考過程に限定されている．従って，本モデルでは学習者の思考過程以外の事については考慮されていないので，本研究の目的である，学習者が一般化をはかる学習をどの様に進めていくべきであるかを明らかにする為に必要な，以下の点には応えていない．

Ⅰ:学習者に対して，どの様な場面を与えるべきか

特殊な場面を与えるべきであることは解ったが，その時間に達成したい一般の命題に対して特殊であれば何でもよい，という事は考えにくい．

Ⅱ：教師はどの様な役割を果たすべきであるか

Ⅰとも関連するが，本モデルには教師の役割が直接記述されているわけではない．

Ⅲ：一般化そのものと本モデルは整合性が取れるか

例えばDölflerの一般化モデル（Dölfler,1991a）などとの関係性だけでなく，本稿においてあえて制限した一般化の質的相違と本モデルの関連についても明らかにされなくてはならない．

6.2.2 一般化をはかる学習モデルの限界

一方で，本モデルから一般化をはかる学習における学習者の数学的思考を捉えきれる訳ではない．

Polyaが述べたように，学習者に対して数学的命題をまず推測し，次に証明するという手順を踏ませるべきであるが，本モデルは一般の命題を推測する事については，ある程度明確にしている．しかし，推測された命題を論証する事についてはあまり考察されていない．

また，帰納・類比・分類といった各様相間の関連についても述べられていない．その為，矢印も常に一方向にしか伸びていない．「有力な特別な特殊」や「極端に特別な特殊」は，どの様にして生み出されるかということについても，何も述べていない．これらの点について考察されなくては，一般化をはかる学習を真に捉えたとは言い難い．

更に，既に何度か述べたように，一般化とは≪特殊から一般へ≫という動的な過程であるため，それぞれの相や様相がいかにして展開されていくか，という動的な観点は必要不可欠である．

その様な観点を取り込む事で，一般化をはかる学習がどの様に進められるべきかがより明らかになる事が期待される．

6.2.3 モデルから明らかになった課題

本モデルを構築する事でこれまでの議論から明らかになっていなかった課題が浮かび上がった．

本モデルでは一般化の結果導かれた一般の命題がどの様なものであるかについては触れていない．従って，一般の命題の中身そのものだけではなく，各特殊と一般の命題がどの様な関係にあるか不明なままであり，今後検討されなくてはならない．

関連して，与えられた場面の特殊・推測された一般の命題，一般の命題からそれぞれ特殊化を経て作られた特殊がどの様な関係にあるのかも検討されなくてはならないだろう．

引用・参考文献

Beth.E and Piaget.J(1966)[W.Mays,Trans.],*Mathematical Epistemology and Psychology*,D.Reidel publishing company

Dörfler.W(1991a). “Forms and means of generalization in Mathematics”, *In Bishop.A (ed.) Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching* , 63-85, Kluwer Academic Publishers.

Polya.G(1945).『いかにして問題をとくか』（垣内賢信訳）,丸善株式会社

Polya.G(1954a),『数学における発見はいかになされるか1「帰納と類比」』,（柴垣和三訳）,丸善株式会社

Polya.G(1954b),『数学における発見はいかになされるか2「発見的推論 そのパターン」』,（柴垣和三訳）,丸善株式会社

Sierpinska.A(2005),“Discoursing Mathematics Away”, in J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O.Skovsmose (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 37. Meaning in mathematics education* (pp. 205–230). New York NY: Springer.

友定章子･姫田恭江･溝口達也(2006),授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相,『鳥取大学数学教育研究』, Vol.9, No.1,1-12

中島健三(1981),『算数･数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察』,金子書房

早田 透,(2009),数学教育における一般化に関する研究.『鳥取大学数学教育研究』 , Vol.12 , No3,1-8

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/